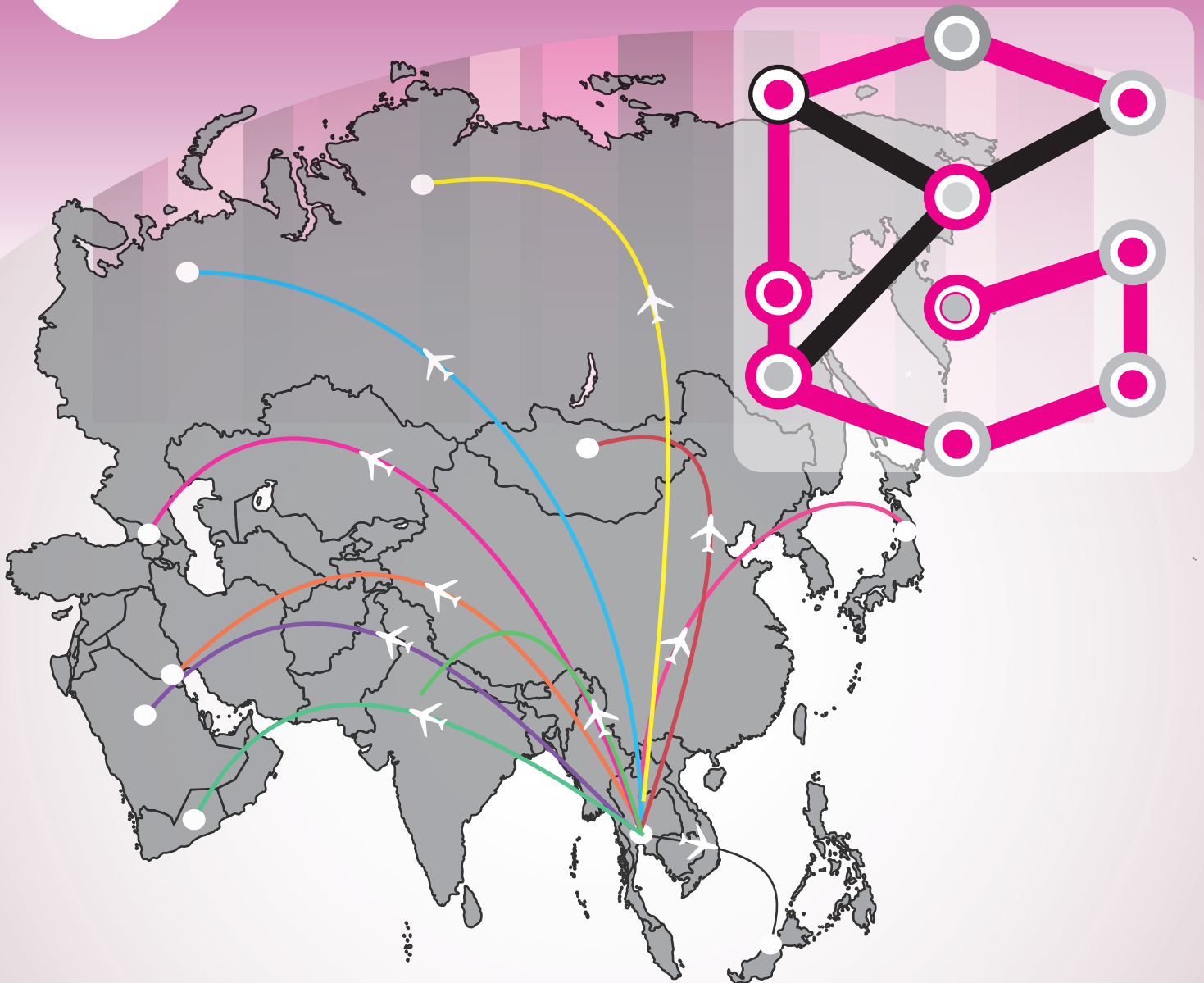




ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น  
ที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์



# Introduction to **G**raph Theory

## ชุดที่ 1 กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

อังคนารัตน์ หวังดี ( กศ.ม. คณิตศาสตร์ )

ครูชำนาญการ โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี)

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 2



## คำนำ

**ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น** เป็นสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญและเป็นประโยชน์อย่างมาก เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟมาประยุกต์ใช้ได้ ในศาสตร์แขนงต่างๆ เช่น พันธุศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เป็นต้น โดยการใช้กราฟเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้จำลองปัญหาบางปัญหาโดยเขียนแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดและเส้น

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอน รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) และเพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกทำกิจกรรมในรูปแบบที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามและวิธีสอนแบบร่วมมือ(STAD) เป็นสถานการณ์ที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน ซึ่งช่วยให้นักเรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ โดยมีครูเป็นผู้ให้คำแนะนำ ตลอดจนติดตามผลการเรียนจากการศึกษาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนอย่างใกล้ชิด

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณท่านผู้อำนวยการโรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) ผู้เชี่ยวชาญ และคณะครูทุกท่านที่ให้คำแนะนำจนชุดกิจกรรมเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี หวังเป็นอย่างยิ่งว่าชุดกิจกรรมชุดนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนและช่วยพัฒนานักเรียนให้มีความเข้าใจในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟ และสามารถพัฒนาทักษะการแก้ปัญหามาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ และรักที่จะเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

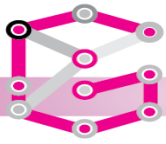
อังคนารัตน์ หวังดี

ครู วิทยฐานะครูชำนาญการ



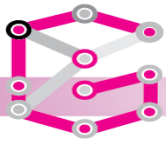
## สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้	1
จุดประสงค์การเรียนรู้	2
เวลาที่ใช้	2
แบบทดสอบก่อนเรียน	3
ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น : กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ	
ใบความรู้ที่ 1.1      เรื่อง กำเนิดทฤษฎีกราฟ	7
ใบกิจกรรมที่ 1.1    เรื่อง กำเนิดกราฟและสวนสนุกสุดหรรษา	9
ใบความรู้ที่ 1.2      เรื่อง จุดยอด (vertex) และ เส้นเชื่อม (edge)	
เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) วงวน (loop)	12
ใบกิจกรรมที่ 1.2    เรื่อง จุดยอด (vertex) และ เส้นเชื่อม (edge)	
เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) วงวน (loop)	15
ใบกิจกรรมที่ 1.3    เรื่อง ทัวร์หรรษา	17
ใบความรู้ที่ 1.4      เรื่อง จุดยอดประชิด (adjacent vertices) และ เกิดกับ (incident)	
กราฟเชิงเดียว (simple graph) และ กราฟหลายเชิง (multi graph)	19
ใบกิจกรรมที่ 1.4    เรื่อง จุดยอดประชิด (adjacent vertices) และ เกิดกับ (incident)	
กราฟเชิงเดียว (simple graph) และ กราฟหลายเชิง (multi graph)	21
แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1	24
แบบทดสอบหลังเรียน	27
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	31
เฉลยกิจกรรมและแบบฝึกเสริมทักษะ	32
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	45
บรรณานุกรม	46

**คำแนะนำในการใช้****ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น  
ที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์**

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อในการจัดการเรียนการสอนสำหรับครู ครูผู้สอนควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้ชุดกิจกรรม เพื่อให้การดำเนินจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุตามวัตถุประสงค์ ดังนี้

1. ครูต้องศึกษาชุดกิจกรรม และเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบพร้อมทั้งทำความเข้าใจกับเนื้อหาทุกชุดก่อนการใช้งาน
2. ครูควรตรวจใบกิจกรรม ใบความรู้ให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดผลและประเมินผล เพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียน และแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ในการเรียน โดยใช้ชุดกิจกรรมให้เข้าใจ
5. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ แบบปรนัย 4 ตัวเลือกจำนวน 10 ข้อ
6. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน โดยพิจารณาความสามารถของสมาชิกในกลุ่มดังนี้ นักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน โดยการแบ่งกลุ่มจะใช้คะแนนของนักเรียนที่ได้จากการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากบทเรียนในหน่วยก่อนหน้า
7. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้ และ ใบกิจกรรมอย่างละเอียดรอบคอบ เป็นลำดับขั้นตอน และปฏิบัติกิจกรรมแต่ละกิจกรรมที่กำหนดให้อย่างเต็มความสามารถ โดยสมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือซึ่งกันและกัน หากมีข้อสงสัยสามารถซักถามครูได้
8. ครูสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ ความสนใจ ความตั้งใจ และความร่วมมือในการร่วมกิจกรรม
9. ครูควรยืดหยุ่นเวลาในการจัดกิจกรรมตามความเหมาะสมและสถานการณ์
10. นักเรียนทำแบบฝึกเสริมทักษะด้วยตนเอง
11. เมื่อปฏิบัติชุดกิจกรรมการเรียนรู้ ชุดที่ 1 เสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เป็นรายบุคคล เพื่อตรวจสอบความรู้และความเข้าใจและทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเปรียบเทียบความก้าวหน้าทางการเรียน

**จุดประสงค์การเรียนรู้**

เมื่อปฏิบัติกิจกรรมชุดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ จบแล้วนักเรียนจะมีความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์รวมทั้งคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ดังนี้

**ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์:** เพื่อให้นักเรียน

1. สามารถหาจุดยอด(vertex)และเส้นเชื่อม(edge)จากกราฟที่กำหนดได้
2. สามารถเขียนกราฟเมื่อกำหนดจุดยอด(vertex)และเส้นเชื่อม (edge) ให้ได้
3. สามารถหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edge) และ วงวน (loop) ได้
4. สามารถหาจุดยอดประชิด(adjacent vertices) และ เส้นเชื่อมเกิดกับ(incident) จุดยอดในกราฟที่กำหนดให้ได้
5. สามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชิงเดียว(simple graph) หรือ กราฟหลายเชิง (multi graph)
6. สามารถแก้ปัญหาบางปัญหาโดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้

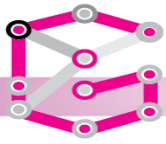
**ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:** เพื่อให้นักเรียน

1. ลงมือแก้ปัญหาที่กำหนดโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา แก้ปัญหาบางปัญหาโดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้
2. การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธี/กลยุทธ์ที่ใช้แก้ปัญหาที่กำหนดได้

**ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์:** เพื่อให้นักเรียน

1. มุ่งมั่นในการทำงาน
2. ใฝ่รู้ใฝ่เรียน

เวลาที่ใช้ 4 คาบ



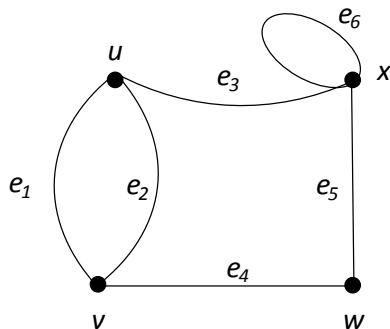
## แบบทดสอบก่อนเรียน

## ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

**วัตถุประสงค์** เพื่อประเมินพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ ซึ่งทำให้นักเรียนได้สำรวจตัวเองว่า มีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาเหล่านี้มากน้อยเพียงใด

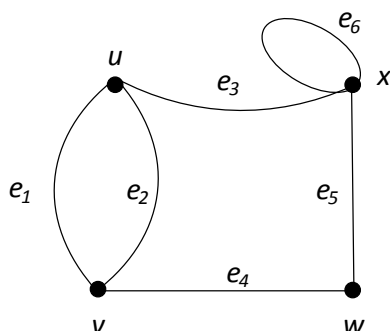
- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ  
 2. คะแนนเต็ม 10 คะแนน เวลาในการทำแบบทดสอบ 15 นาที  
 3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ทับตัวอักษรหน้าคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้  $V(G)$  คือข้อใดต่อไปนี้



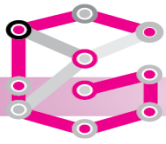
- ก.  $\{\{u\}, \{v\}, \{w\}, \{x\}\}$   
 ข.  $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}\}$   
 ค.  $\{u, v, w, x\}$   
 ง.  $\{uv, ux, uv, vw, wx, xx\}$

2. จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้  $E(G)$  คือข้อใดต่อไปนี้

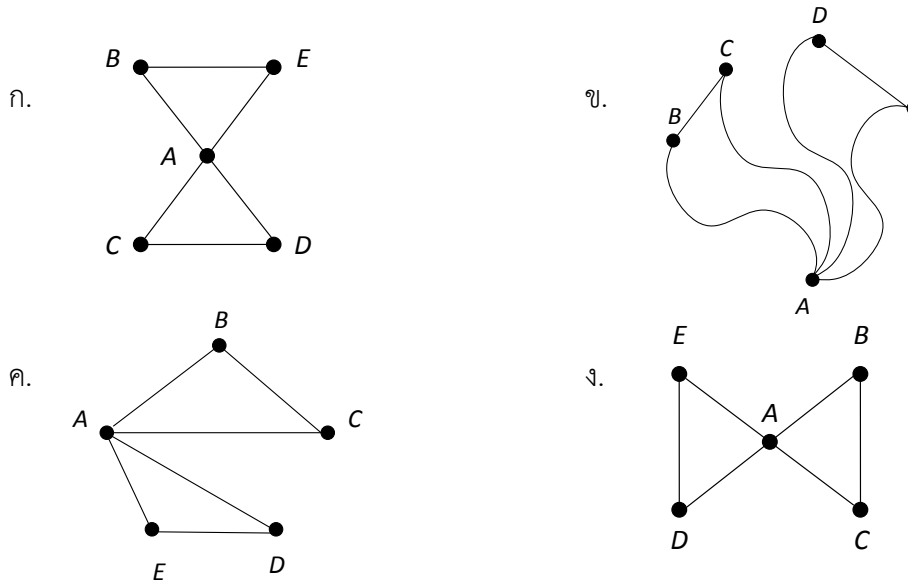


- ก.  $\{\{u\}, \{v\}, \{w\}, \{x\}\}$   
 ข.  $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}\}$   
 ค.  $\{u, v, w, x\}$   
 ง.  $\{uv, ux, uv, vw, wx, xx\}$

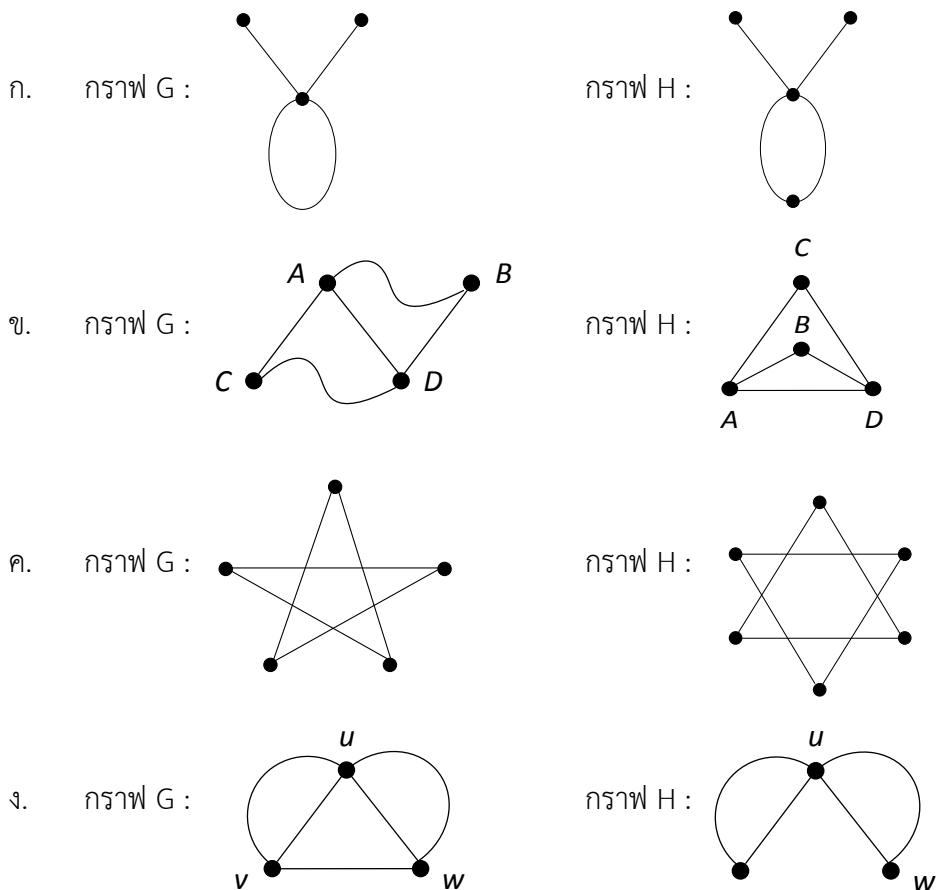


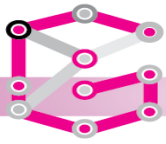


3. กำหนดกราฟ  $G$  มีจุด  $A, B, C, D, E$  มีเส้น  $AB, AC, AD, AE, BC, DE$  ข้อใดไม่ใช่การเขียนแผนภาพแทนกราฟ  $G$

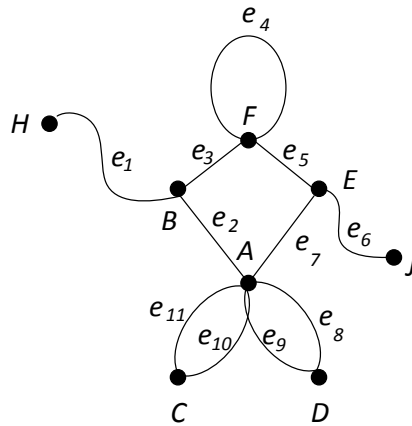


4. กราฟใดต่อไปนี้เป็นกราฟเดียวกัน



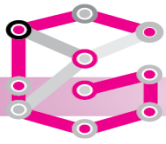


จากกราฟที่กำหนดให้จงตอบคำถามข้อ 5 – 8

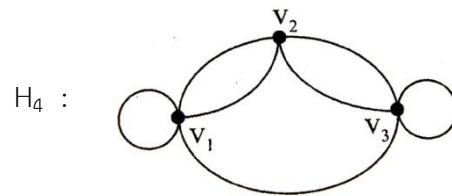
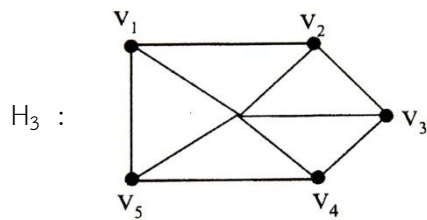
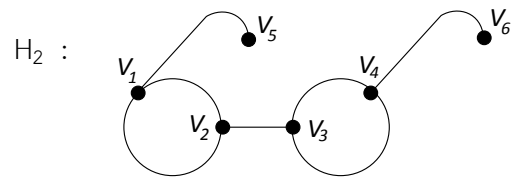
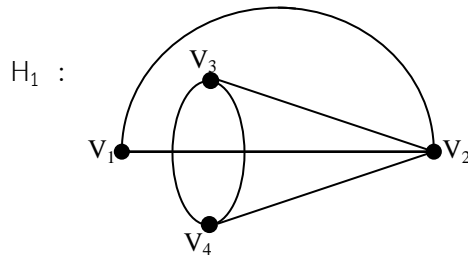


5. จากกราฟเส้นเชื่อมคู่ใดเป็นเส้นเชื่อมขนาน
  - ก.  $e_1$  และ  $e_3$
  - ข.  $e_2$  และ  $e_5$
  - ค.  $e_7$  และ  $e_8$
  - ง.  $e_{10}$  และ  $e_{11}$
6. จากกราฟเส้นเชื่อมใดเป็นวงวน
  - ก.  $e_2, e_3, e_5$  และ  $e_7$
  - ข.  $e_8$  และ  $e_9$
  - ค.  $e_4$
  - ง.  $e_1$
7. จากกราฟข้อใดต่อไปนี้เป็นคู่ตัด
  - ก. จุดยอด A กับจุดยอด F เป็นจุดยอดประชิด
  - ข. จุดยอด H กับจุดยอด B ไม่เป็นจุดยอดประชิด
  - ค. จุดยอด C กับจุดยอด D ไม่เป็นจุดยอดประชิด
  - ง. จุดยอด B กับจุดยอด C เป็นจุดยอดประชิด
8. จากกราฟเส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด A
  - ก.  $e_1$
  - ข.  $e_2$
  - ค.  $e_3$
  - ง.  $e_4$





9. กำหนดกราฟ  $H_1, H_2, H_3$  และ  $H_4$  ดังรูป ข้อใดกล่าวถูกต้อง



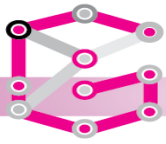
- ก.  $H_1$  เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะ มีวงวน
- ข.  $H_2$  เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะ มีเส้นเชื่อมขนาน
- ค.  $H_3$  เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ ไม่มีวงวน
- ง.  $H_4$  เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวน และ เส้นเชื่อมขนาน

10. บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งงานว่าง 4 ตำแหน่ง คือ A , B , C และ D มีผู้สมัครงาน 4 คน คือ แดง , ดำ , ขาว และ ฟ้า โดยที่แต่ละคนมีความสามารถทำงานในตำแหน่งต่างๆดังนี้

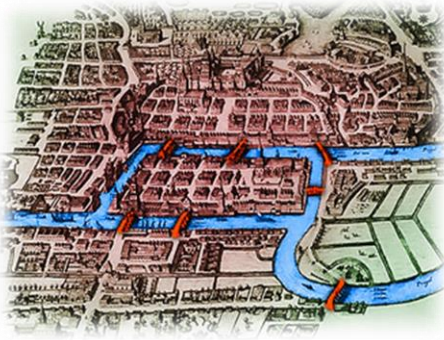
- แดง มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง A
- ดำ มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง A , B และ D
- ขาว มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง C และ D
- ฟ้า มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง A และ B

บริษัทจะจัดตำแหน่งงานให้ผู้สมัครทั้งสี่คนโดยที่ผู้สมัครทุกคนสามารถเข้าทำงานได้ ข้อใดถูกต้อง

- ก. ดำทำงานในตำแหน่ง D
- ข. ขาวทำงานในตำแหน่ง D
- ค. ฟ้าทำงานในตำแหน่ง A
- ง. แดงทำงานในตำแหน่ง B

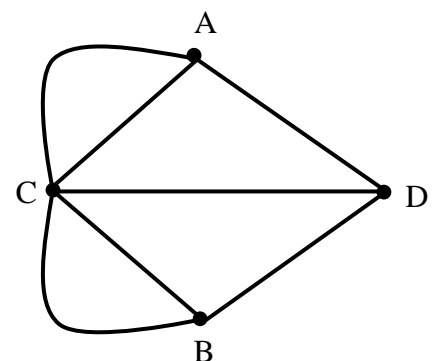


### ใบความรู้ที่ 1.1 : เรื่อง กำเนิดทฤษฎีกราฟ

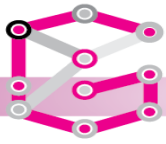


คริสต์ศตวรรษที่ 18 มีเมืองๆหนึ่งชื่อ เคอนิกส์แบร์ก (Königsberg) ตั้งอยู่บนสองฝั่งของแม่น้ำเพเรเกิล (Pregel) ต่อมาเปลี่ยนชื่อเป็นคาลินินกราด (Kaliningrad) อยู่ในสหภาพโซเวียต รัสเซียทางด้านตะวันออก ปัจจุบันเมื่อสหภาพโซเวียตถูกแบ่งแยกแล้วเมืองนี้สังกัดอยู่กับสหพันธรัฐรัสเซีย เมืองเคอนิกส์แบร์กประกอบด้วยเกาะ 2 เกาะ ซึ่งเชื่อมระหว่างเกาะกับตัวเมืองด้วยสะพาน 7 แห่งดังรูป

เนื่องจากชาวเมืองมีนิสัยชอบเดินเล่น จึงตั้งปัญหาเกี่ยวกับการเดินขึ้นว่า “เป็นไปได้หรือไม่ว่า ถ้าเริ่มต้น ณ ที่แห่งหนึ่ง(บนแผ่นดินหรือเกาะ) แล้วเดินข้ามสะพาน โดยผ่านสะพานแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นได้” ปัญหานี้ไม่มีใครให้คำตอบได้ จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1736 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์ ชาวสวิสเซอร์แลนด์ ซึ่งต่อมาได้รับยกย่องว่าเป็นบิดาของทฤษฎีกราฟ ได้ตีพิมพ์บทความให้คำตอบพร้อมคำอธิบายว่าการเดินลักษณะดังกล่าวว่า เป็นไปไม่ได้ เพราะการที่คนคนหนึ่งจะทำเช่นนั้นได้ เขาจะต้องเดินมาที่เกาะ แล้วกลับออกไปโดยใช้สะพานที่ต่างกันจำนวนครั้งที่เท่ากันซึ่งไม่อาจทำได้ ถ้าคำตอบของออยเลอร์มีเพียงเท่านี้ ปัญหาสะพานเคอนิกส์แบร์ก คงไม่กลายเป็นปัญหามะตะในวิชาคณิตศาสตร์ แต่ธรรมชาติของนักคณิตศาสตร์มักไม่พอใจเพียงคำตอบเฉพาะกรณี เขามักแสวงหาคำตอบทั่วไปเพื่อจะตอบปัญหาอื่นๆที่มีลักษณะเดียวกันด้วย ออยเลอร์ได้เปลี่ยนรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปัญหาแล้วเสนอเป็นตัวแทนนามธรรม โดยจำลองปัญหาด้วยการใช้จุดแทนเกาะและฝั่งแม่น้ำ และเส้นเชื่อมสะพานซึ่งเชื่อมจุดทั้ง 4 จุด และพบว่าไม่สามารถจะลากเส้นให้ครบทุกจุดโดยผ่านเส้นเพียงครั้งเดียวได้ ซึ่งได้แบบจำลองดังนี้



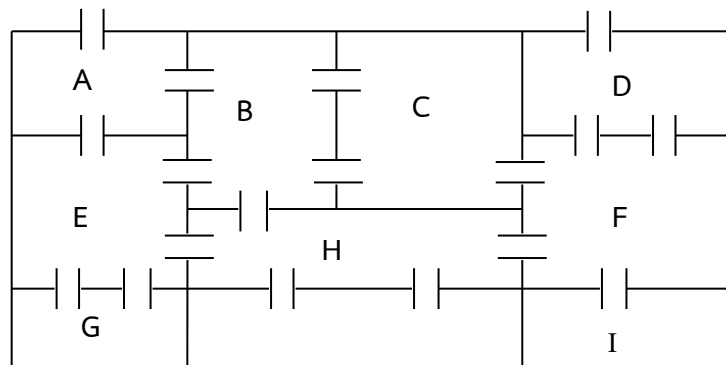
A, B แทนฝั่งแม่น้ำ C, D แทนเกาะ เส้นเชื่อมทั้ง 7 เส้น แทน สะพาน



ต่อมาเคอร์ชอฟ (Kirchhoff ค.ศ.1824 – 1887) และ เคเลย์ (Cayley ค.ศ.1821 – 1895) ได้ขยายทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น คือ เคอร์ชอฟแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้น และทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับต้นไม้ (Tree) ซึ่งต้นไม้นี้เป็นกราฟชนิดหนึ่ง ส่วนเคเลย์ได้ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับต้นไม้เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาการหาจำนวนไอโซเมอร์ของสารเคมีบางชนิดนอกจากนี้ยังมีปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกราฟอีกจำนวนมากมาย เช่น ปัญหาที่ตั้งขึ้นโดยฮามิลตัน (Hamilton ค.ศ. 1805 – 1865) และ ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สีในแผนที่ (The Four Color Problem) ซึ่งปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุด ในทฤษฎีกราฟ

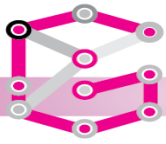
การหาคำตอบแบบออยเลอร์ สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ ได้อีกเช่น

- 1) ปัญหาบุรุษไปรษณีย์จีน (The Chinese Postman Problem) ปัญหานี้มีอยู่ว่า ถ้ามีถนนสายต่างๆ และทราบความยาวของถนนแต่ละสาย บุรุษไปรษณีย์จะต้องเดินทางทั่วทุกถนนเพื่อจ่ายไปรษณีย์ภัณฑ์ทั้งหมด บุรุษไปรษณีย์จะเดินทางให้ทั่วอย่างไรจึงจะทำให้ผลรวมของระยะทางมีค่าต่ำที่สุด และหลังจากที่จ่ายไปรษณีย์ภัณฑ์ทั้งหมดแล้วจะต้องกลับมาอยู่ที่จุดเริ่มต้น
- 2) ปัญหาการเดินทางชมห้องต่างๆ ในบ้าน ถ้ารูปคือแปลนบ้านที่ประกอบด้วยห้อง 9 ห้อง โดยมีประตูเชื่อมระหว่างห้องต่างๆ และประตูที่เชื่อมระหว่างห้องกับบริเวณข้างนอก



- 3) ปัญหาสาธารณูปโภค (Utilities Problem) การวางแผนเพื่อวางท่อน้ำ ท่อก๊าซ ท่อไฟฟ้า เป็นต้น ในปัจจุบัน ได้มีการนำความรู้ที่พัฒนาอย่างเป็นระบบมาช่วยในการแก้ปัญหาต่างๆ มากมายไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ปัญหาด้านวิทยาศาสตร์ ปัญหาด้านธุรกิจ ปัญหาด้านสังคม เป็นต้น โดยนำปัญหาดังกล่าวมาสร้างเป็น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) แล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นมาวิเคราะห์และศึกษาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแก้ปัญหาดังกล่าวจะเป็นไปอย่างถูกต้องสมเหตุสมผล และก่อให้เกิดประโยชน์อื่นๆ อีกมากมาย

การนำปัญหาดังกล่าวมาสร้างให้อยู่ในรูปตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นทำได้มากมายหลายวิธี และมีอยู่วิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันมากคือ การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในลักษณะแผนภาพ (diagram) และเรียกแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดและเส้นว่า **กราฟ (graph)**



### ใบกิจกรรมที่ 1.1 : เรื่อง กำเนิดกราฟและสวนสนุกสุดหรรษา

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จากใบความรู้ที่ 1.1 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. บิดาของทฤษฎีกราฟคือใคร และ ชนชาติใด

.....  
.....

2. ปัญหาที่ถูกตีพิมพ์ที่ทำให้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเป็นที่รู้จัก คือ ปัญหาใด และมีลักษณะอย่างไร

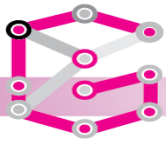
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3. ทฤษฎีกราฟ เคอร์ชอฟ ( Kirchhoff ค.ศ.1824 – 1887 ) ได้ประยุกต์ใช้แก้ปัญหาใด

.....  
.....  
.....

4. นักเรียนคิดว่า ทฤษฎีกราฟ นำมาใช้ในการแก้ปัญหาใดได้บ้าง ยกตัวอย่างมา 5 ตัวอย่าง

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....





### สวนสนุกสุดหรรษา

ขวัญข้าวชวนเพื่อนไปเที่ยวสวนสนุกแห่งหนึ่ง โดยมีเครื่องเล่นขนาดใหญ่ทั้งหมด 4 เครื่องเล่น คือ Ranger , Twin Dragon, Log Flume, และ Sky Coaster โดยมีถนน 2 สายเชื่อม Ranger และ Twin Dragon มีถนน 1 สาย เชื่อม Ranger และ Log Flume มีถนน 1 สาย เชื่อม Twin Dragon และ Sky Coaster มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง Ranger และ Sky Coaster และมีถนน 1 สายเชื่อมเมือง Twin Dragon และ Log Flume ถ้าขวัญข้าวและเพื่อนเริ่มเล่นจาก Log Flume โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้ว กลับมาถึงเมือง Log Flume ได้หรือไม่ ถ้าได้ต้องเดินแบบใด



1. สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

---

---

2. สิ่งที่สามารถปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

---

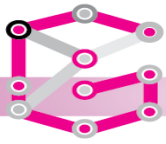
---

---

---

---

---



3. ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

---

---

4. จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด  
วิธีทำ

5. คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

---

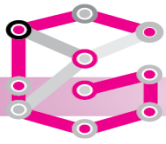
---

---

---







ใบความรู้ที่ 1.2 : เรื่อง จุดยอด (vertex) เส้นเชื่อม (edge)  
เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop)



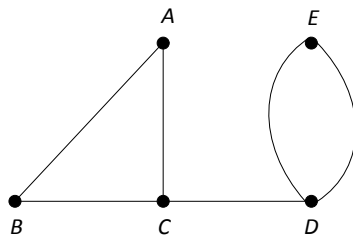
จากกิจกรรมที่ 1.1 นักเรียนจะพบว่าโจทย์สถานการณ์ที่นักเรียนได้รับ ต้องสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้แผนภาพที่เรียกว่า “กราฟ” ขึ้นมา ประกอบไปด้วย จุดยอด และ เส้นเชื่อม เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

**บทนิยาม 1** กราฟ  $G$  ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์  $V(G)$
2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์  $E(G)$

เพื่อเพิ่มความเข้าใจในบทนิยามมากขึ้นเราลองมาดูตัวอย่างกันนะคะ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตของจุดยอด  $V(G)$  และเส้นเชื่อม  $E(G)$  ในกราฟ  $G$  ต่อไปนี้



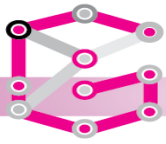
$$V(G) = \{ A, B, C, D, E \}$$

$$E(G) = \{ AB, AC, BC, CD, DE, ED \}$$

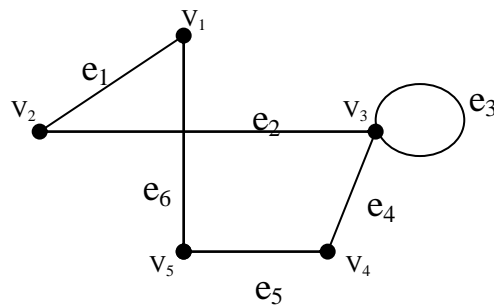
๐ แต่  $E(G)$  อาจเป็นเซตว่างได้

- 2) เส้นเชื่อมแต่ละเส้น คือ อันดับของจุดยอด  $A$  และจุดยอด  $B$  แสดงว่าเส้นเชื่อม  $AB$  และ  $BA$  เป็นเส้นเชื่อมเดียวกัน





ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตของจุดยอด  $V(G)$  และเส้นเชื่อม  $E(G)$  ในกราฟ  $G$  ต่อไปนี้



$$V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$$

$$E(G) = \{ v_1v_2, v_2v_3, v_3v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1 \} \text{ หรือ}$$

$$E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}$$

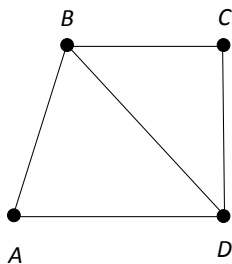
ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนแผนภาพแทนกราฟ  $G$  ที่กำหนดด้วย

$$V(G) = \{ A, B, C, D \}$$

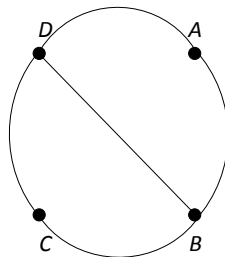
$$E(G) = \{ AB, BC, BD, CD \}$$

สามารถเขียนกราฟ  $G$  ได้หลายแบบ เช่น รูปที่ (1), (2) หรือ (3)

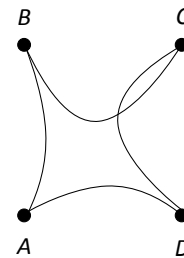
ซึ่งเรียกว่า กราฟสมสัณฐานกัน (isomorphic) ดังนี้



รูปที่ (1)



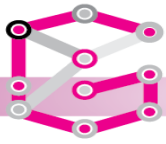
รูปที่ (2)



รูปที่ (3)



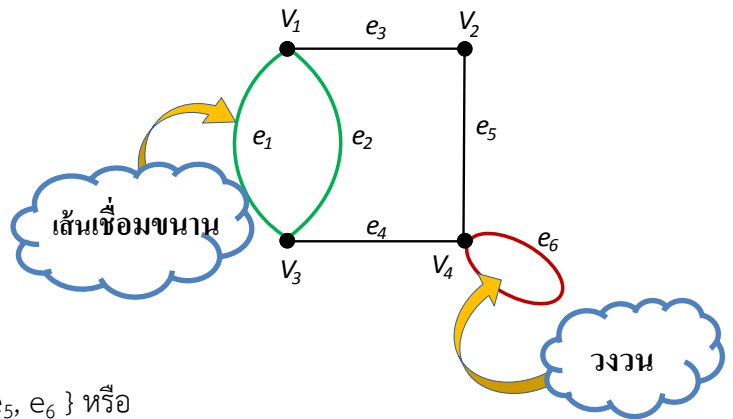
- ข้อสังเกต** 1) เส้นเชื่อมของกราฟเป็นส่วนของเส้นตรงหรือเส้นโค้ง และมีความยาวเท่าใดก็ได้
- 2) เส้นเชื่อมของกราฟ อาจลากตัดกัน ได้โดยที่จุดตัดของเส้นไม่ถือว่าเป็นจุดยอด

**บทนิยาม 2**

เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันเรียกว่า **เส้นเชื่อมขนาน** (parallel edges)  
 เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวเรียกว่า **วงวน** (loop)

ตัวอย่างที่ 4 จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้จงหา

1.  $V(G)$  และ  $E(G)$
2. วงวนของกราฟ  $G$
3. เส้นเชื่อมขนานของกราฟ



วิธีทำ 1.  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  หรือ

$E(G) = \{v_1v_3, v_1v_3, v_1v_2, v_3v_4, v_2v_4, v_4v_4\}$

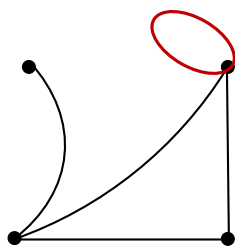
2. เนื่องจาก  $e_6$  เชื่อมจุด  $v_4$  เพียงจุดเดียว ดังนั้น  $e_6$  เป็นวงวนของกราฟ  $G$

3.  $e_1$  และ  $e_2$  เป็นเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดคู่เดียวกันคือ  $v_1$  และ  $v_3$

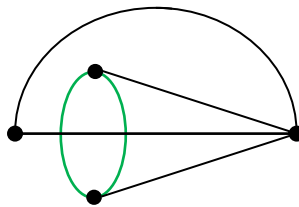
ดังนั้น  $e_1$  และ  $e_2$  เป็นเส้นเชื่อมขนานของกราฟ  $G$

แต่  $e_3$  และ  $e_4$  ไม่เป็นเส้นเชื่อมขนานของกราฟ  $G$

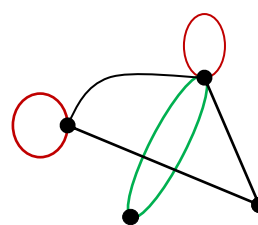
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดกราฟ  $G_1, G_2, G_3$  และ  $G_4$  ดังรูป



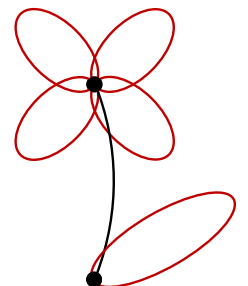
$G_1$



$G_2$



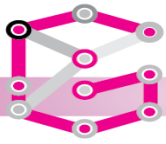
$G_3$



$G_4$

จากกราฟข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) กราฟใดมีวงวน  $G_1, G_3$  และ  $G_4$
- 2) กราฟใดมีเส้นเชื่อมขนาน  $G_2$  และ  $G_3$



ใบกิจกรรมที่ 1.2 : เรื่อง จุดยอด (vertex) เส้นเชื่อม (edge) เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop)

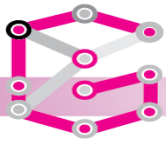
ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

1. จงหา  $V(G)$  และ  $E(G)$  ของกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

กราฟ $G$	เซตของจุดยอด $V(G)$ และเส้นเชื่อม $E(G)$
<p>1.1</p> <p><math>G_1</math> :</p>	<p><math>V(G) = \dots\dots\dots</math></p> <p><math>E(G) = \dots\dots\dots</math></p>
<p>1.2</p> <p><math>G_2</math> :</p>	<p><math>V(G) = \dots\dots\dots</math></p> <p><math>E(G) = \dots\dots\dots</math></p>
<p>1.3</p> <p><math>G_3</math> :</p>	<p><math>V(G) = \dots\dots\dots</math></p> <p><math>E(G) = \{XZ, \dots\dots\dots\}</math> หรือ</p> <p><math>E(G) = \{e_1, \dots\dots\dots\}</math></p>

2. จงเขียนกราฟ  $G$  เมื่อกำหนด เซตของจุดยอด  $V(G)$  และเส้นเชื่อม  $E(G)$  ดังนี้

<p>2.1 <math>V(G) = \{A, B, C, D, E\}</math></p> <p><math>E(G) = \{AB, BB, BD, DE, ED, EC\}</math></p>	<p>2.2 <math>V(G) = \{x, y, z, w\}</math></p> <p><math>E(G) = \{yz, yw, zw, wz\}</math></p>



## 3. จงหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop) จากกราฟต่อไปนี้

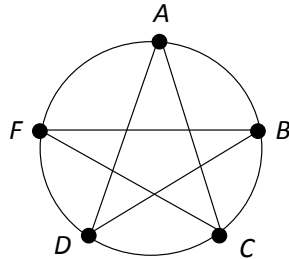
3.1



เส้นเชื่อมขนาน คือ .....

วงวน คือ .....

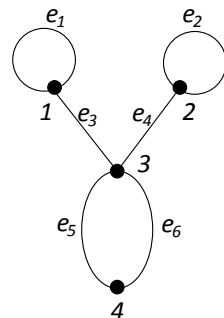
3.2



เส้นเชื่อมขนาน คือ .....

วงวน คือ .....

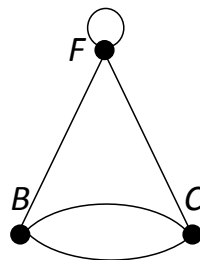
3.3



เส้นเชื่อมขนาน คือ .....

วงวน คือ .....

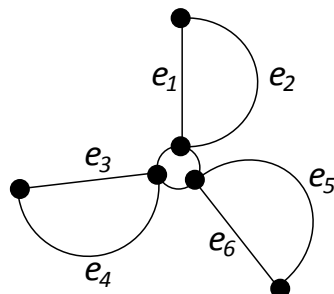
3.4



เส้นเชื่อมขนาน คือ .....

วงวน คือ .....

3.5

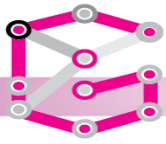


เส้นเชื่อมขนาน คือ .....

วงวน คือ .....



ไม่อยากเลยใช่ไหมคะ



## ใบกิจกรรมที่ 1.3 : เรื่อง ทัวรหรรษา

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

ก๊ส กอล์ฟ คิม แนนดี้ และวิน สมัครเข้าทำงานตามความสามารถทางภาษาเพื่อดูแลลูกค้าชาวต่างชาติในบริษัท  
ทัวรหรรษา โดยมีงานว่าง 5 ตำแหน่ง ซึ่งความสามารถของบุคคลทั้ง 5 คน มีดังนี้

ก๊ส มีความสามารถในการพูดภาษา จีน และ เกาหลี

กอล์ฟ มีความสามารถในการพูดภาษา จีน

คิม มีความสามารถในการพูดภาษา ญี่ปุ่น และ อังกฤษ

แนนดี้ มีความสามารถในการพูดภาษา อังกฤษ และ จีน

วิน มีความสามารถในการพูดภาษา อังกฤษ และ ฝรั่งเศส

จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่บุคคลทั้ง 5 คน ได้รับเข้าทำงานในตำแหน่งนี้ทั้งหมด

1. สิ่งที่ยุ่สถานการณั้ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

.....

.....

2. สิ่งที่ยุ่สถานการณั้ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

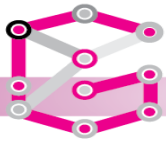
3. ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหามีอะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....



4. จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา

5. คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

---

---

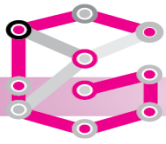
---

---

---







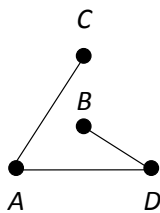
ใบความรู้ที่ 1.4 : เรื่อง จุดยอดประชิด (adjacent vertices) เกิดกับ (incident) กราฟเชิงเดียว (simple graph) และกราฟหลายเชิง (multi graph)

### บทนิยาม 3

จุดยอด  $u$  และจุดยอด  $v$  ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด** (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง

เส้นเชื่อม  $e$  ของกราฟ**เกิดกับ** (incident) จุดยอด  $v$  ถ้าจุดยอด  $v$  เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม  $e$

ตัวอย่างที่ 6 จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้



จุดยอด  $A$  กับจุดยอด  $C$  เป็นจุดยอดประชิดกัน เนื่องจากมีเส้นเชื่อม  $AC$

จุดยอด  $A$  กับจุดยอด  $D$  เป็นจุดยอดประชิดกัน เนื่องจากมีเส้นเชื่อม  $AD$

จุดยอด  $B$  กับจุดยอด  $D$  เป็นจุดยอดประชิดกัน เนื่องจากมีเส้นเชื่อม  $BD$

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $A$  คือ เส้นเชื่อม  $AC, AD$

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $B$  คือ เส้นเชื่อม  $BD$

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $C$  คือ เส้นเชื่อม  $CA$

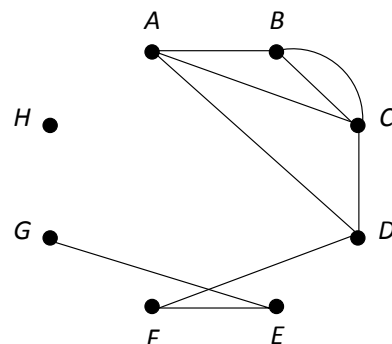
เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $D$  คือ เส้นเชื่อม  $DB, DA$

ตัวอย่างที่ 7 ให้  $G$  เป็นกราฟที่กำหนดโดย

$$V(G) = \{ A, B, C, D, E, F, G, H \}$$

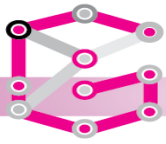
$$E(G) = \{ AB, AC, AD, BC, CD, EF, EG, BC, FD \}$$

1. เขียนแผนภาพแทนกราฟ  $G$



2. จากกราฟ  $G$  จงตอบคำถามต่อไปนี้

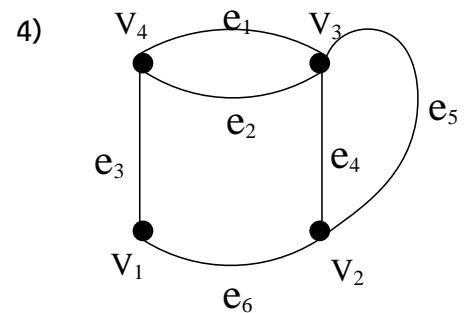
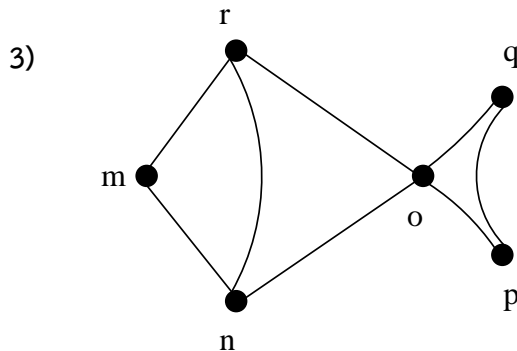
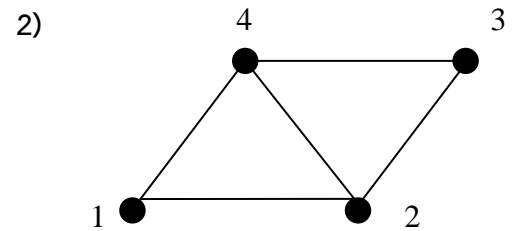
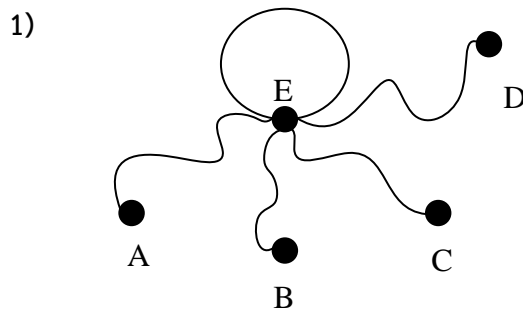
- 1) จุดยอด  $A$  ประชิดกับจุดยอด  $B, C$  และ  $D$
- 2) เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด  $E$  เส้นเชื่อม  $EG, EF$
- 3) จุดยอด  $F$  ประชิดกับจุดยอด  $E$  และ  $D$
- 4) เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด  $D$  เส้นเชื่อม  $CD, AD$  และ  $DF$

**บทนิยาม 4**

กราฟอย่างง่าย หรือ กราฟเชิงเดียว (simple graph) ก็ต่อเมื่อ เป็นกราฟที่ไม่มีวงวน(loop) และ ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน(parallel edge)

สำหรับกราฟที่ไม่ใช่กราฟเชิงเดียวเรียกว่า กราฟหลายเชิง (multi graph)

ตัวอย่างที่ 8 .ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่า กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชิงเดียวหรือกราฟหลายเชิง

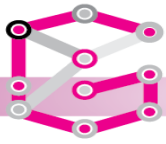


วิธีทำ ข้อ 1) เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวนที่จุด E

ข้อ 2) เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะ ไม่มีวงวน และ เส้นเชื่อมขนาน

ข้อ 3) เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะ ไม่มีวงวน และ เส้นเชื่อมขนาน

ข้อ 4) เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีเส้นเชื่อมขนาน  $e_1, e_2$  และ  $e_4, e_5$

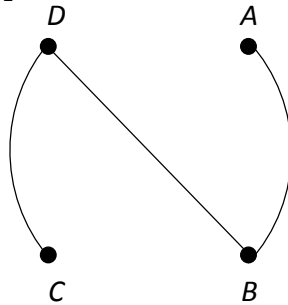


ใบกิจกรรมที่ 1.4 : จุดยอดประชิด (adjacent vertices) และ เกิดกับ (incident)  
กราฟเชิงเดียว (simple graph) และกราฟหลายเชิง (multi graph)

ชื่อ..... ชั้น..... เลขที่..... กลุ่ม.....

1. จากกราฟ G ที่กำหนดให้จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.1



$V(G) =$  .....

$E(G) =$  .....

จุดยอด A ประชิดกับจุดยอด .....

จุดยอด B ประชิดกับจุดยอด .....

จุดยอด C ประชิดกับจุดยอด .....

จุดยอด D ประชิดกับจุดยอด .....

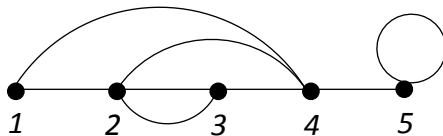
เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด A .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด B .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด C .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด D .....

1.2



$V(G) =$  .....

$E(G) =$  .....

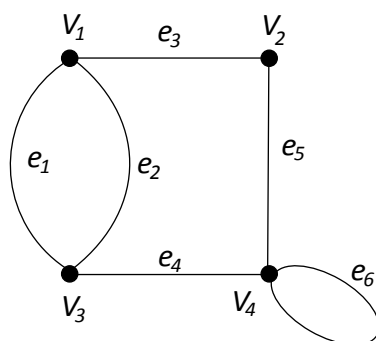
จุดยอด 1 ประชิดกับจุดยอด .....

จุดยอด 3 ประชิดกับจุดยอด .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด 4 .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด 5 .....

1.3



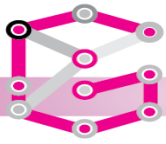
$V(G) =$  .....

$E(G) =$  .....

จุดยอด  $V_4$  ประชิดกับจุดยอด .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด  $V_1$  .....

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด  $V_2$  .....



2. ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่า กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชิงเดียวหรือกราฟหลายเชิงเพราะเหตุใด

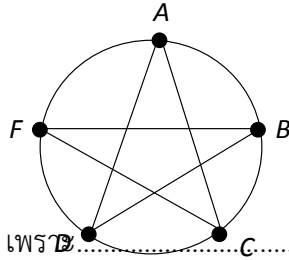
2.1



เป็นกราฟ.....

เพราะ.....

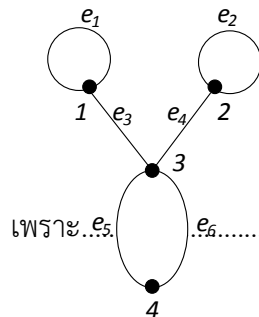
2.2



เป็นกราฟ.....

เพราะ.....

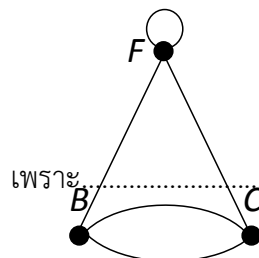
2.3



เป็นกราฟ.....

เพราะ.....

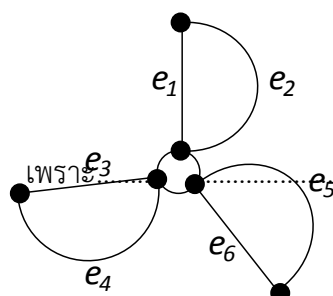
2.4



เป็นกราฟ.....

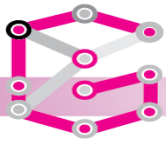
เพราะ.....

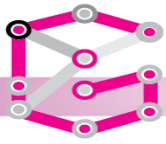
2.5



เป็นกราฟ.....

เพราะ.....





3. ให้นักเรียนยกตัวอย่างกราฟ  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  และ  $G_4$  ซึ่งแต่ละกราฟต้องมีจุด 5 จุด มีเส้น 7 เส้น และมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

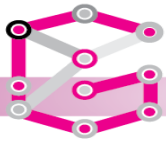
$G_1$  : เป็นกราฟเชิงเดียว

$G_2$  : เป็นกราฟหลายเชิงที่ไม่มีวงวน

$G_3$  : เป็นกราฟหลายเชิงที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน

$G_4$  : เป็นกราฟหลายเชิงที่มีทั้งวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

$G_1$ :	$G_2$ :
$G_3$ :	$G_4$ :

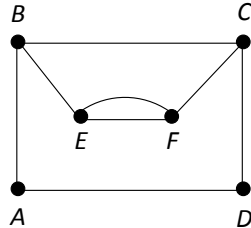


## แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1

## เรื่อง กำเนิดกราฟและควำมรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

1. จากกราฟที่กำหนดให้จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1.1



$V(G) = \dots\dots\dots$

$E(G) = \dots\dots\dots$

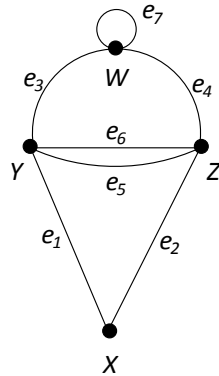
วงวนคือ  $\dots\dots\dots$

เส้นเชื่อมขนาน คือ  $\dots\dots\dots$

จุดยอด A ประชิดกับจุดยอด  $\dots\dots\dots$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด C  $\dots\dots\dots$

1.2



$V(G) = \dots\dots\dots$

$E(G) = \dots\dots\dots$

วงวนคือ  $\dots\dots\dots$

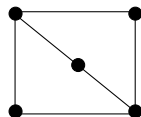
เส้นเชื่อมขนาน คือ  $\dots\dots\dots$

จุดยอด y ประชิดกับจุดยอด  $\dots\dots\dots$

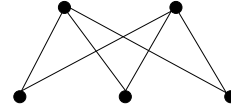
เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด w  $\dots\dots\dots$

2. จงแสดงว่า กราฟแต่ละคู่ต่อไปนี้ สมสัณฐานกัน(isomorphic) โดยการตั้งชื่อจุดที่สมนัยกันด้วยตัวอักษรเดียวกัน

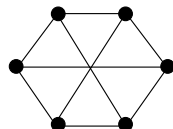
a.



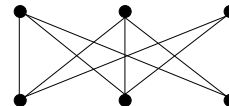
และ



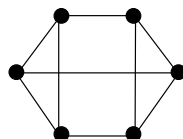
b.



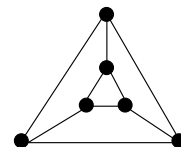
และ



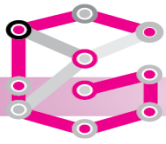
c.



และ







3. เชฟหมึกแดงต้องการเข้าแข่งขันชิงแชมป์ Iron Chef Thailand เขาต้องมอบหมายงานให้กับผู้ช่วยของเขา ซึ่งมีความสามารถเฉพาะทาง 4 คน คือ A , B , C และ D เขามีงาน 4 แบบสำหรับผู้ช่วย 4 คนนี้ คือ งานล้าง หั่น งานผัด งานต้ม และงานตกแต่งจาน โดย A มีความสามารถในงานล้างหั่นและงานตกแต่งจาน B มีความสามารถในงานงานต้มและตกแต่งจาน C มีความสามารถในงานล้างหั่นและงานผัด และ D มีความสามารถในงานผัดและงานต้ม เชฟหมึกแดงจะสามารถมอบงานให้กับผู้ช่วยทุกคนของเขาได้ตรงกับความสามารถของแต่ละคนหรือไม่

3.1 สิ่งที่คุณต้องการแก้ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

---

---

3.2 สิ่งที่คุณต้องการปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

---

---

---

---

3.3 ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

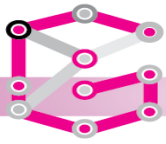
---

3.4 จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด  
วิธีทำ

3.5 คำตอบของคุณสำหรับปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

---

---



4. สายลับคนหนึ่งเข้าไปสืบข่าวในบ้านของผู้ต้องสงสัยและได้ส่งข่าวมาให้กับตำรวจเพื่อเข้าไปค้นหาหลักฐาน โดยภายในบ้านมีประตูกลที่เมื่อมีคนผ่านแล้วจะปิดลงทันทีและจะออกมาได้เมื่อผ่านประตูครบทุกบาน ซึ่งข่าวที่ได้มาคือ มีประตูระหว่างห้องโถงกับห้องนอน 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องโถงกับห้องทำงาน 2 ประตู

มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องแต่งตัว 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องน้ำ 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องทำงาน 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องทำงานกับห้องน้ำ 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องแต่งตัวกับห้องโถง 1 ประตู

ตำรวจจะทำภารกิจนี้สำเร็จได้หรือไม่ ถ้าได้ควรจะมีวิธีการเข้าไปสำรวจแต่ละห้องอย่างไรจึงจะสำเร็จ

4.1 สิ่งที่คุณสามารถหาจากการหา มีอะไรบ้าง

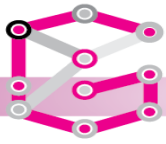
4.2 สิ่งที่คุณสามารถหาจากการกำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

4.3 ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

4.4 จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด

วิธีทำ

4.5 คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง



## แบบทดสอบหลังเรียน

## ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

**วัตถุประสงค์** เพื่อตรวจสอบความรู้และความเข้าใจและทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเปรียบเทียบความก้าวหน้าทางการเรียนของนักเรียน เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

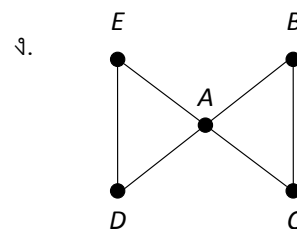
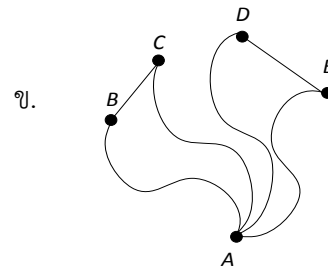
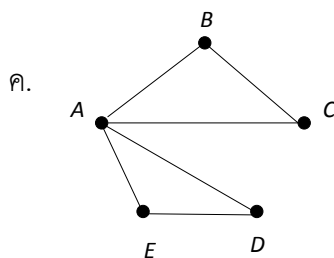
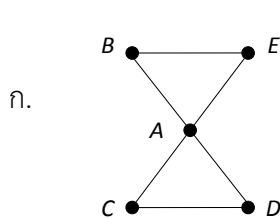
คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ

2. คะแนนเต็ม 10 คะแนน เวลาในการทำแบบทดสอบ 15 นาที

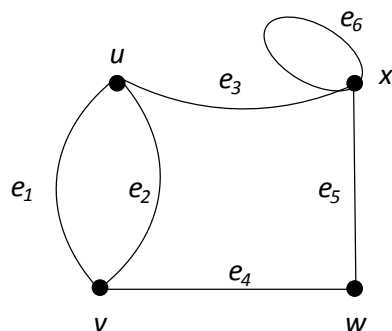
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ทับตัวอักษรหน้าคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

## ตอนที่ 1

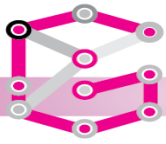
1. กำหนดกราฟ  $G$  มีจุด  $A, B, C, D, E$  มีเส้น  $AB, AC, AD, AE, BC, DE$  ข้อใดไม่ใช่การเขียนแผนภาพแทนกราฟ  $G$



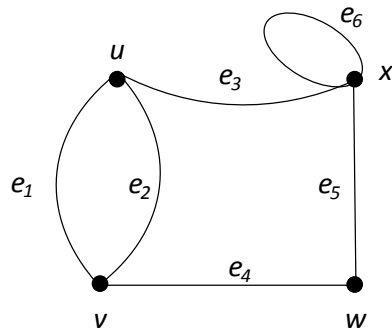
2. จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้  $E(G)$  คือข้อใดต่อไปนี้



- ก.  $\{\{u\}, \{v\}, \{w\}, \{x\}\}$   
 ข.  $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}\}$   
 ค.  $\{u, v, w, x\}$   
 ง.  $\{uv, ux, vx, wx, ww, xx\}$

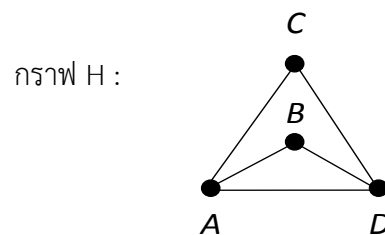
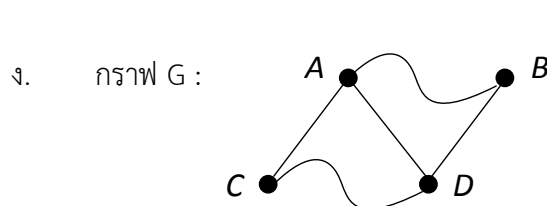
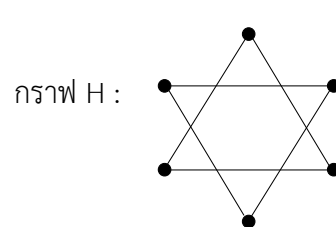
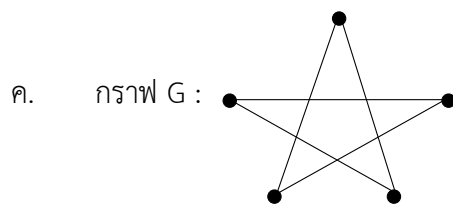
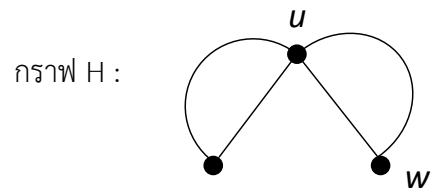
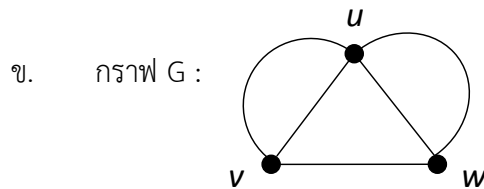
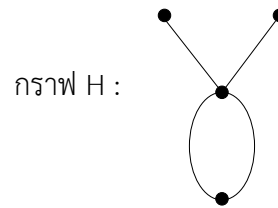
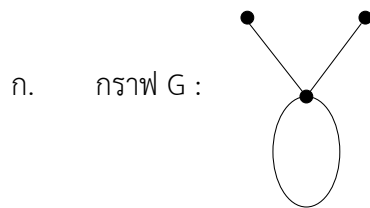


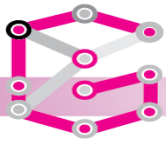
3. จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้  $V(G)$  คือข้อใดต่อไปนี้



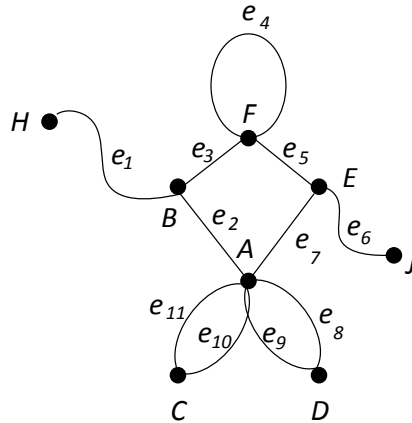
- ก.  $\{\{u\}, \{v\}, \{w\}, \{x\}\}$
- ข.  $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}\}$
- ค.  $\{u, v, w, x\}$
- ง.  $\{uv, ux, uv, vw, wx, xx\}$

4. กราฟใดต่อไปนี้เป็นกราฟเดียวกัน

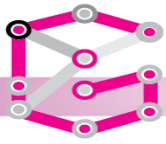




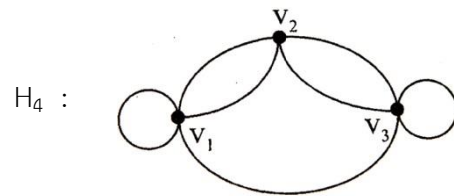
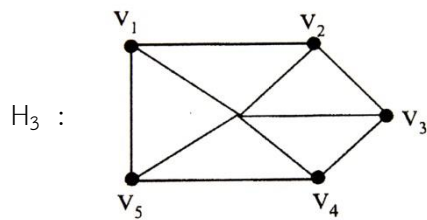
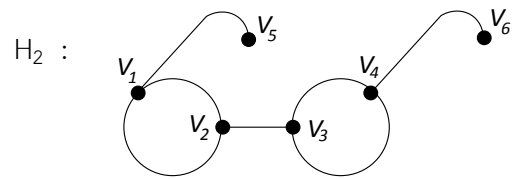
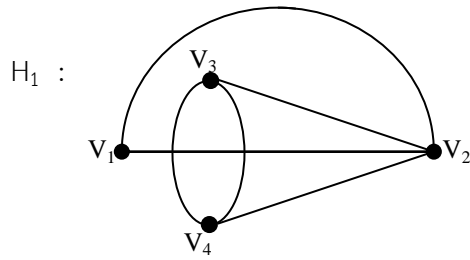
จากกราฟที่กำหนดให้จงตอบคำถามข้อ 5 – 8



5. จากกราฟเส้นเชื่อมใดเป็นวงวน
  - ก.  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $e_5$  และ  $e_7$
  - ข.  $e_8$  และ  $e_9$
  - ค.  $e_4$
  - ง.  $e_1$
6. จากกราฟเส้นเชื่อมคูใดเป็นเส้นเชื่อมขนาน
  - ก.  $e_1$  และ  $e_3$
  - ข.  $e_2$  และ  $e_5$
  - ค.  $e_7$  และ  $e_8$
  - ง.  $e_{10}$  และ  $e_{11}$
7. จากกราฟเส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด A
  - ก.  $e_1$
  - ข.  $e_2$
  - ค.  $e_3$
  - ง.  $e_4$
8. จากกราฟข้อใดต่อไปนี้เป็นคู่จุดยอด
  - ก. จุดยอด A กับจุดยอด F เป็นจุดยอดประชิด
  - ข. จุดยอด H กับจุดยอด B ไม่เป็นจุดยอดประชิด
  - ค. จุดยอด C กับจุดยอด D ไม่เป็นจุดยอดประชิด
  - ง. จุดยอด B กับจุดยอด C เป็นจุดยอดประชิด



9. กำหนดกราฟ  $H_1, H_2, H_3$  และ  $H_4$  ดังรูป ข้อใดกล่าวถูกต้อง



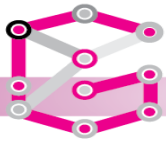
- ก.  $H_1$  เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะ มีวงวน
- ข.  $H_4$  เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวน และ เส้นเชื่อมขนาน
- ค.  $H_2$  เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะ มีเส้นเชื่อมขนาน
- ง.  $H_3$  เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ ไม่มีวงวน

10. บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งงานว่าง 4 ตำแหน่ง คือ A , B , C และ D มีผู้สมัครงาน 4 คน คือ แดง , ดำ , ขาว และ ฟ้า โดยที่แต่ละคนมีความสามารถทำงานในตำแหน่งต่างๆดังนี้

- แดง มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง A
- ดำ มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง A , B และ D
- ขาว มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง C และ D
- ฟ้า มีความสามารถทำงานในตำแหน่ง A และ B

บริษัทจะจัดตำแหน่งงานให้ผู้สมัครทั้งสี่คนโดยที่ผู้สมัครทุกคนสามารถเข้าทำงานได้ ข้อใดถูกต้อง

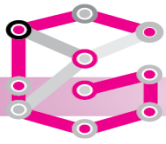
- ก. ดำทำงานในตำแหน่ง D
- ข. ขาวทำงานในตำแหน่ง D
- ค. ฟ้าทำงานในตำแหน่ง A
- ง. แดงทำงานในตำแหน่ง B

**เฉลย**แบบทดสอบก่อนเรียน

ชุดที่ 1 เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

ข้อ	เฉลย
1	ค
2	ง
3	ก
4	ข
5	ง
6	ค
7	ค
8	ข
9	ง
10	ก





### เฉลย คำถาม ใบกิจกรรมที่ 1.1 : เรื่อง กำเนิดทฤษฎีกราฟสวนสนุกสุดหรรษา

จากใบความรู้ที่ 1.1 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. บิดาของทฤษฎีกราฟคือใคร และ ชนชาติใด

.....เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler.) นักคณิตศาสตร์ ชาวสวิสเซอร์แลนด์.....

2. ปัญหาที่ถูกตีพิมพ์ที่ทำให้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเป็นที่รู้จัก คือ ปัญหาใด และมีลักษณะอย่างไร

.....ปัญหาสะพานเคอนิกส์แบร์ก..... เป็นไปได้หรือไม่ที่คนคนหนึ่งจะเดินข้ามสะพานทั้ง 7 เพียงสะพานละหนึ่งครั้ง โดยจะตั้งต้นที่ไหนและจะสิ้นสุดที่ใดก็ได้ ออยเลอร์ได้เปลี่ยนรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปัญหาแล้วเสนอเป็นตัวแทนนามธรรม โดยจำลองปัญหาด้วยการใช้จุดแทนเกาะและฝั่งแม่น้ำ และเส้นเชื่อมสะพานซึ่งเชื่อมจุดทั้ง 4 จุด..... พร้อมคำอธิบายว่าการเดินลักษณะดังกล่าวว่า เป็นไปไม่ได้.....

3. ทฤษฎีกราฟ เคอร์ชอฟ (Kirchhoff ค.ศ.1824 – 1887) ได้ประยุกต์ใช้แก้ปัญหาใด

.....ได้ขยายทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น คือ เคอร์ชอฟแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับวงจรไฟฟ้า.....

4. นักเรียนคิดว่า ทฤษฎีกราฟ นำมาใช้ในการแก้ปัญหาใดได้บ้าง ยกตัวอย่างมา 5 ตัวอย่าง

.....1. ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี.....

.....2. ปัญหาการวางแผนระบบสาธารณูปโภค.....

.....3. ปัญหาการเดินทางต่างๆ.....

.....4. ปัญหาการหาจำนวนไอโซเมอร์ของสารเคมี.....

.....5. ปัญหาการส่งไปรษณีย์.....

..... ฯลฯ.....

ขวัญข้าวชวนเพื่อนไปเที่ยวสวนสนุกแห่งหนึ่ง โดยมีเครื่องเล่นขนาดใหญ่ทั้งหมด 4 เครื่องเล่น คือ Ranger , Twin Dragon, Log Flume, และ Sky Coaster โดยมีถนน 2 สายเชื่อม Ranger และ Twin Dragon มีถนน 1 สาย เชื่อม Ranger และ Log Flume มีถนน 1 สาย เชื่อม Twin Dragon และ Sky Coaster มีถนน 1 สายเชื่อม Ranger และ Sky Coaster และมีถนน 1 สายเชื่อม Twin Dragon และ Log Flume ถ้าขวัญข้าวและเพื่อนเริ่มเล่นจาก Log Flume โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาถึงเมือง Log Flume ได้หรือไม่ ถ้าได้ต้องเดินแบบใด



1. สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

.....- ถ้าขวัญข้าวและเพื่อนเริ่มเล่นจาก Log Flume โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาถึงเมือง Log Flume ได้หรือไม่

.....- ถ้าได้ต้องเดินแบบใด

2. สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

.....เครื่องเล่นทั้งหมด 4 เครื่องเล่น คือ Ranger , Twin Dragon, Log Flume, และ Sky Coaster

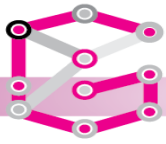
.....มีถนน 2 สายเชื่อม Ranger และ Twin Dragon

.....มีถนน 1 สาย เชื่อม Ranger และ Log Flume

.....มีถนน 1 สาย เชื่อม Twin Dragon และ Sky Coaster

.....มีถนน 1 สายเชื่อม Ranger และ Sky Coaster

.....มีถนน 1 สายเชื่อม Twin Dragon และ Log Flume



3. ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

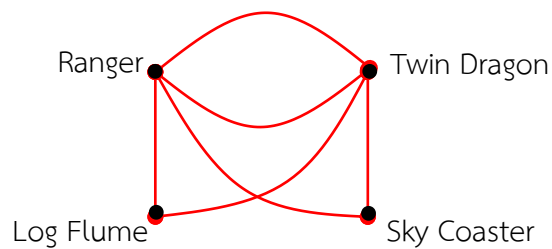
การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์โดยใช้กราฟ

4. จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด

วิธีทำ ให้จุดยอด คือ เครื่องเล่นทั้ง 4 คือ Ranger , Twin Dragon, Log Flume, และ Sky Coaster

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุด แทน ถนนที่เชื่อมระหว่างเครื่องเล่น

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ ดังรูป



การพิจารณา โดยการ ลากเส้นโดยเริ่มจากจุดยอด Log Flume พบว่าสามารถผ่านทุกเส้นเชื่อมได้เพียงครั้งเดียวและสามารถกลับมาที่เมือง Log Flume ได้

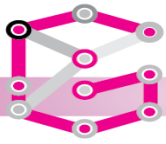
5. คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

-ถ้าขึ้นรถออกจากเมือง ค โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาถึงเมือง ค สามารถทำได้

-เดินทางได้หลายแบบ เช่น

Log Flume → Ranger → Twin Dragon → Ranger → Sky Coaster → Twin Dragon → Log Flume

Log Flume → Twin Dragon → Ranger → Twin Dragon → Sky Coaster → Ranger → Log Flume



**เฉลย** ใบกิจกรรมที่ 1.2 : เรื่อง จุดยอด (vertex) เส้นเชื่อม (edge)  
เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop)

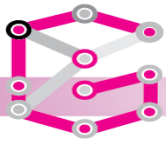
1. จงหา  $V(G)$  และ  $E(G)$  ของกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

กราฟ $G$	เซตของจุดยอด $V(G)$ และเส้นเชื่อม $E(G)$
<p>1.1</p> <p><math>G_1</math> :</p>	<p><math>V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}</math></p> <p><math>E(G) = \{V_1 V_2, V_2 V_3, V_3 V_4, V_4 V_5, V_5 V_1\}</math></p>
<p>1.2</p> <p><math>G_2</math> :</p>	<p><math>V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}</math></p> <p><math>E(G) = \{AB, BC, CB, CD, DE, EF, EA\}</math></p>
<p>1.3</p> <p><math>G_3</math> :</p>	<p><math>V(G) = \{X, Y, Z, W, M, N\}</math></p> <p><math>E(G) = \{XZ, ZX, YZ, ZY, XW, YW, MN\}</math> หรือ</p> <p><math>E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}</math></p>

2. จงเขียนกราฟ  $G$  เมื่อกำหนด เซตของจุดยอด  $V(G)$  และเส้นเชื่อม  $E(G)$  ดังนี้

<p>2.1 <math>V(G) = \{A, B, C, D, E\}</math></p> <p><math>E(G) = \{AB, BB, BD, DE, ED, EC\}</math></p>	<p>2.2 <math>V(G) = \{x, y, z, w\}</math></p> <p><math>E(G) = \{yz, yw, zw, wz\}</math></p>

(ในการเขียนกราฟอาจเขียนได้หลายแบบที่ไม่เหมือนกัน)



## 3. จงหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop) จากกราฟต่อไปนี้

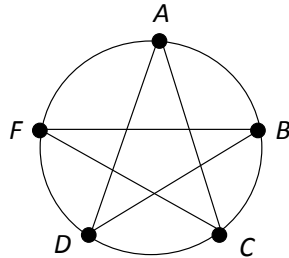
3.1



เส้นเชื่อมขนาน คือ ...AB.....

วงวน คือ ...BB.....

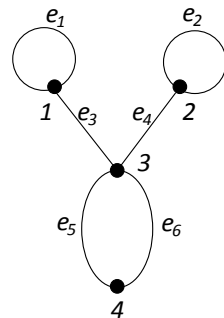
3.2



เส้นเชื่อมขนาน คือ ...ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน.....

วงวน คือ ...ไม่มีวงวน.....

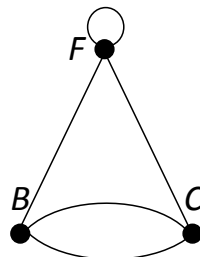
3.3



เส้นเชื่อมขนาน คือ ...e5 กับ e6.....

วงวน คือ ...e5, e6.....

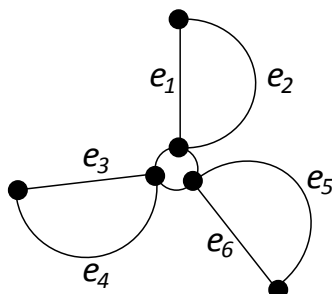
3.4



เส้นเชื่อมขนาน คือ ...BC, CB.....

วงวน คือ ...FF.....

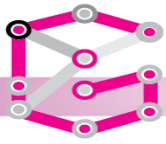
3.5



เส้นเชื่อมขนาน คือ ...e1 กับ e2, e3 กับ e4,

...e5 กับ e6.....

วงวน คือ ...ไม่มีวงวน.....



## เฉลย ใบกิจกรรมที่ 1.3 : เรื่อง ทัวรหารษา

ก๊ส กอล์ฟ คิม แนนดี้ และวิน สมัครเข้าทำงานตามความสามารถทางภาษาเพื่อดูแลลูกค้าชาวต่างชาติในบริษัท ทัวรหารษา โดยมีงานว่าง 5 ตำแหน่ง ซึ่งความสามารถของบุคคลทั้ง 5 คน มีดังนี้

ก๊ส มีความสามารถในการพูดภาษา จีน และ เกาหลี

กอล์ฟ มีความสามารถในการพูดภาษา จีน

คิม มีความสามารถในการพูดภาษา ญี่ปุ่น และ อังกฤษ

แนนดี้ มีความสามารถในการพูดภาษา อังกฤษ และ จีน

วิน มีความสามารถในการพูดภาษา อังกฤษ และ ฝรั่งเศส

จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่บุคคลทั้ง 5 คน ได้รับเข้าทำงานในตำแหน่งนี้ทั้งหมด

สิ่งที่สถานการณ์ปัญหามองหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

.....เป็นไปได้อหรือไม่ที่บุคคลทั้ง 5 คน ได้รับเข้าทำงานในตำแหน่งนี้ทั้งหมด.....

1. สิ่งที่สถานการณ์ปัญหามองหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

.....งานว่าง 5 ตำแหน่ง และ ความสามารถของบุคคลทั้ง 5 คน.....

.....ก๊ส มีความสามารถในการพูดภาษา จีน และ เกาหลี.....

.....กอล์ฟ มีความสามารถในการพูดภาษา จีน.....

.....คิม มีความสามารถในการพูดภาษา ญี่ปุ่น และ อังกฤษ.....

.....แนนดี้ มีความสามารถในการพูดภาษา อังกฤษ และ จีน.....

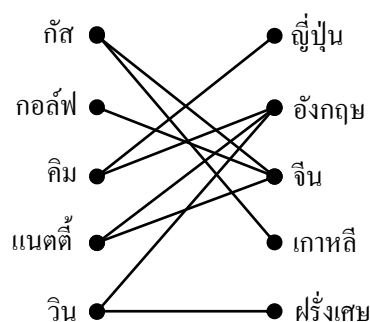
.....วิน มีความสามารถในการพูดภาษา อังกฤษ และ ฝรั่งเศส.....

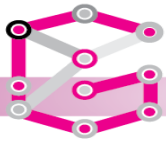
2. ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

.....การสร้างตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์โดยใช้กราฟ.....

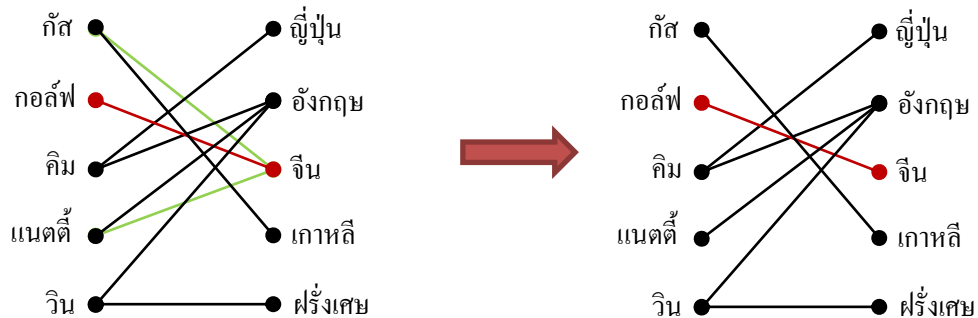
3. จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด

วิธีทำ ให้จัดยอดแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทนบุคคล 5 คน กลุ่มที่ 2 แทนตำแหน่งงาน 5 ตำแหน่ง  
เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุด แทน ความสัมพันธ์ระหว่างคนกับสามารถในการทำงานของคนคนนั้น  
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนตัวอย่างแบบจำลองได้ดังรูป

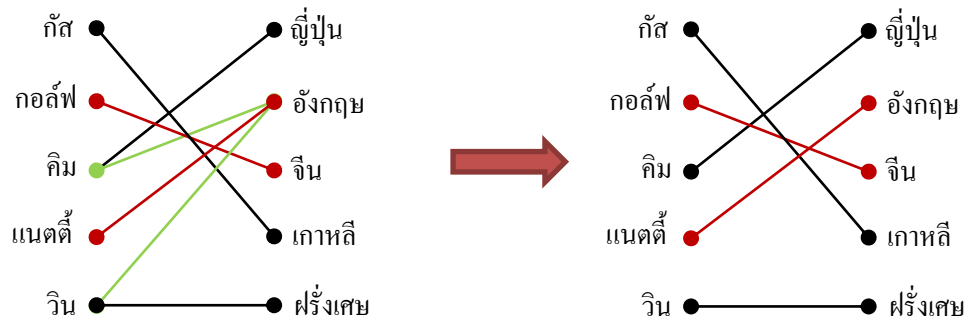




การพิจารณาจับคู่โดยเลือกจุดที่มีเส้นเชื่อมน้อยที่สุดก่อนในที่นี้คือ สมใจ คู่กับ ตำแหน่งที่ 3  
จากนั้น ตัดเส้นเชื่อมที่เชื่อมกับ ตำแหน่งที่ 3 เส้นอื่นออก



แล้วจึงพิจารณาจุดต่อไปที่มีเส้นเชื่อม น้อยที่สุดอันต่อไป ในที่นี้คือ สมศักดิ์ คู่กับ ตำแหน่งที่ 4 แล สม  
เจตต์ คู่กับ ตำแหน่งที่ 2 จากนั้น ตัดเส้นเชื่อมที่เชื่อมกับ ตำแหน่งที่ 2 , 4 เส้นอื่นออก

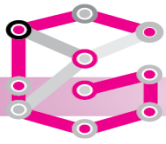


ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนได้คำตอบซึ่งบางสถานการณ์อาจมีมากกว่าหนึ่งคำตอบ

4. คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

คน	งาน
ก๊ส	เกาหลี
กอล์ฟ	จีน
คิม	ญี่ปุ่น
แนนดี้	อังกฤษ
วิน	ฝรั่งเศส

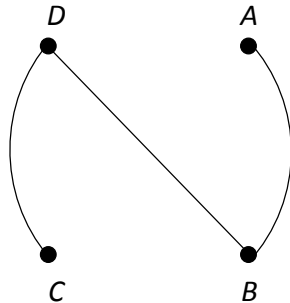




เฉลย ใบกิจกรรมที่ 1.4 : เรื่อง จุดยอดประชิด (adjacent vertices) เกิดกับ (incident) กราฟเชิงเดียว (simple graph) และ กราฟหลายเชิง (multi graph)

1. จากกราฟ G ที่กำหนดให้จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.1



$$V(G) = \{A, B, C, D\}$$

$$E(G) = \{AB, BD, DC\}$$

จุดยอด A ประชิดกับจุดยอด  $B$

จุดยอด B ประชิดกับจุดยอด  $A, D$

จุดยอด C ประชิดกับจุดยอด  $D$

จุดยอด D ประชิดกับจุดยอด  $B, C$

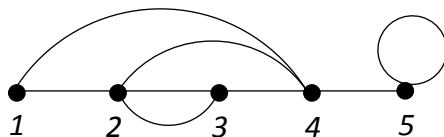
เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด A  $AB$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด B  $AB, BD$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด C  $CD$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด D  $CD, BD$

1.2



$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E(G) = \{12, 14, 23, 24, 34, 45, 55\}$$

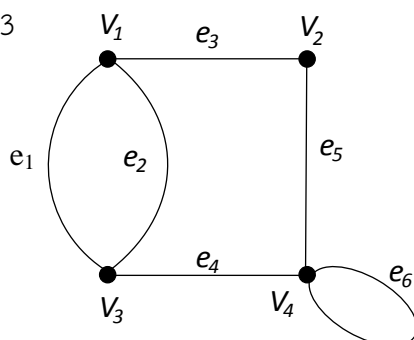
จุดยอด 1 ประชิดกับจุดยอด  $2, 4$

จุดยอด 3 ประชิดกับจุดยอด  $2, 4$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด 4  $41, 42, 43, 45$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด 5  $54, 55$

1.3



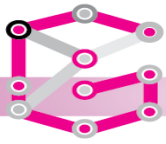
$$V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

จุดยอด  $V_3$  ประชิดกับจุดยอด  $V_1, V_4$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด  $V_1$   $e_1, e_2, e_3$

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด  $V_2$   $e_3, e_5$



2. ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่า กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชิงเดียวหรือกราฟหลายเชิงเพราะเหตุใด

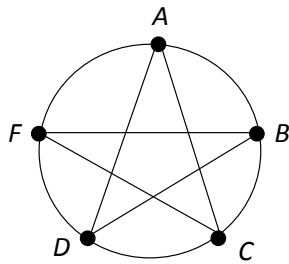
2.1



เป็นกราฟ...หลายเชิง.....

เพราะมี ...วงวนที่จุด B.....

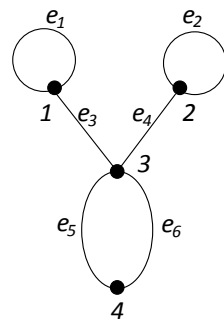
2.2



เป็นกราฟ...เชิงเดียว.....

เพราะมี ...ไม่มีวงวน และ เส้นเชื่อมขนาน.....

2.3

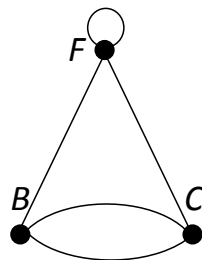


เป็นกราฟ...หลายเชิง.....

เพราะมี ...วงวนที่จุด 1, 2.....

.....และมีเส้นเชื่อมขนาน  $e_5, e_6$ .....

2.4

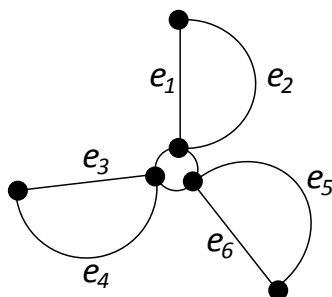


เป็นกราฟ...หลายเชิง.....

เพราะมี ...วงวนที่จุด F.....

.....และมีเส้นเชื่อมขนาน BC, CB.....

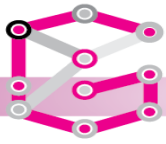
2.5



เป็นกราฟ...หลายเชิง.....

เพราะมี ...มีเส้นเชื่อมขนาน  $e_1, e_2$  และ  $e_3, e_4$ .....

.....และ  $e_5, e_6$ .....



3. ให้นักเรียนยกตัวอย่างกราฟ  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  และ  $G_4$  ซึ่งแต่ละกราฟต้องมีจุด 5 จุด มีเส้น 7 เส้น และมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

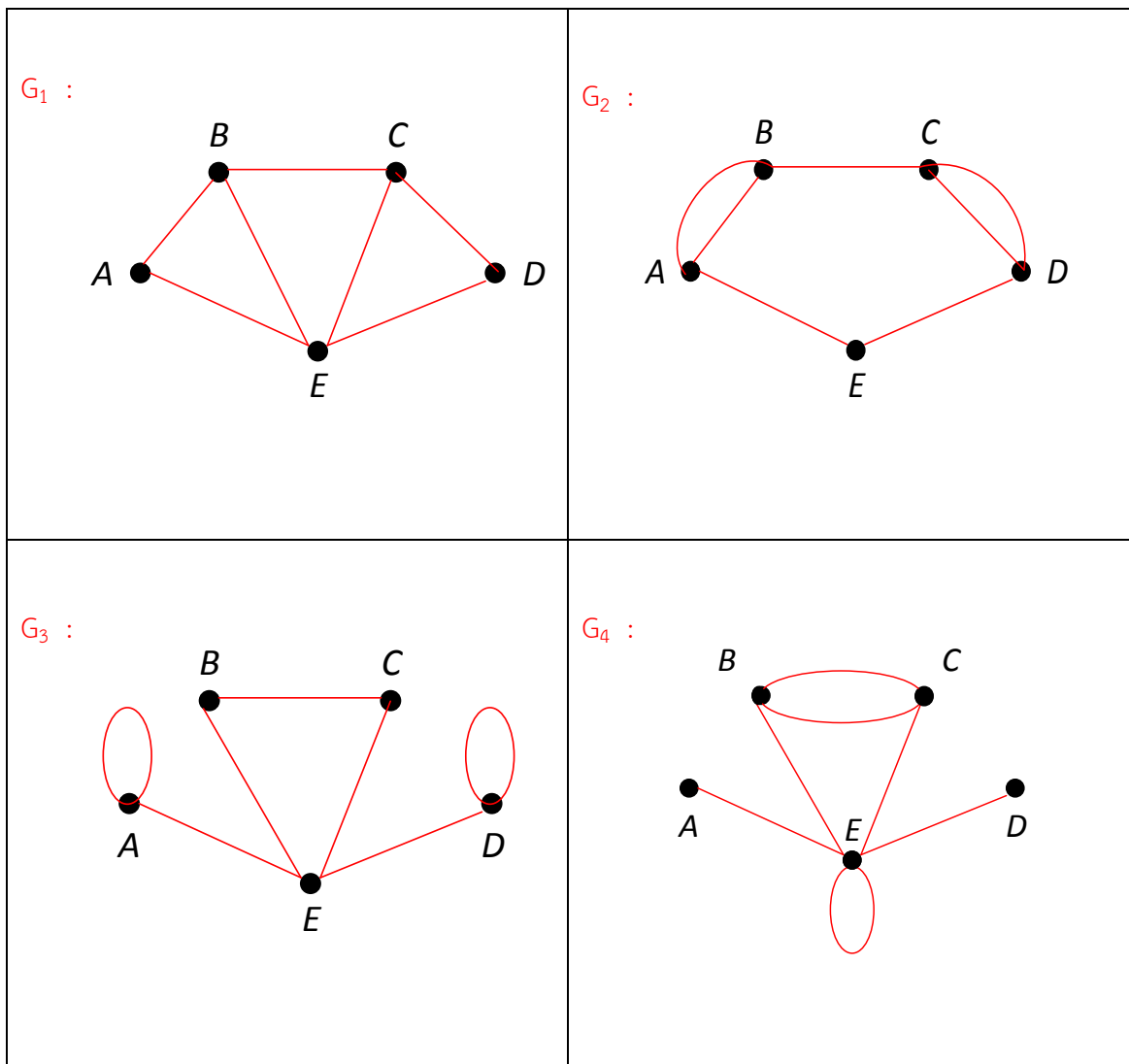
$G_1$  : เป็นกราฟเชิงเดียว

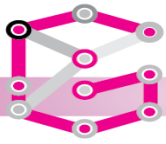
$G_2$  : เป็นกราฟหลายเชิงที่ไม่มีวงวน

$G_3$  : เป็นกราฟหลายเชิงที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน

$G_4$  : เป็นกราฟหลายเชิงที่มีทั้งวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

(เป็นตัวอย่างกราฟซึ่งสามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ)



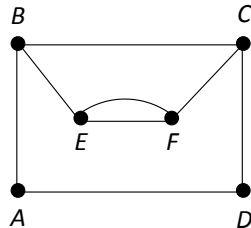


เฉลย แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1

เรื่อง กำเนิดกราฟและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

1. จากกราฟที่กำหนดให้จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1.1



$V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$

$E(G) = \{AB, BC, CD, DA, BE, EF, FE, FC\}$

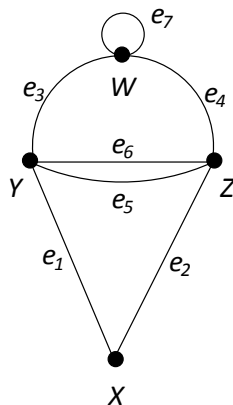
วงวนคือ ไม่มีวงวน

เส้นเชื่อมขนาน คือ EF, FE

จุดยอด A ประชิดกับจุดยอด B, D

เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด C CB, CD, CF

1.2



$V(G) = \{X, Y, Z, W\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

วงวนคือ  $e_7$

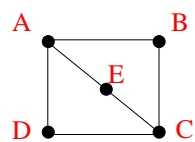
เส้นเชื่อมขนาน คือ  $e_5, e_6$

จุดยอด y ประชิดกับจุดยอด X, Z, W

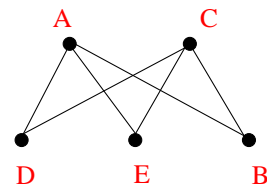
เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด W  $e_3, e_4, e_7$

2. จงแสดงว่า กราฟแต่ละคู่ต่อไปนี้ สมสัณฐานกัน(isomorphic) โดยการตั้งชื่อจุดที่สมนัยกันด้วยตัวอักษรเดียวกัน

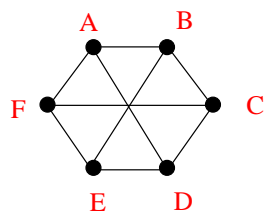
a.



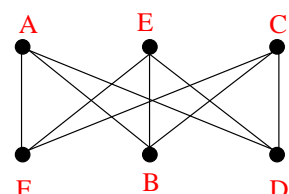
และ



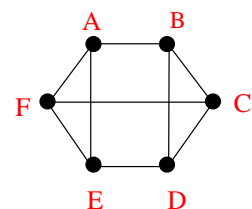
b.



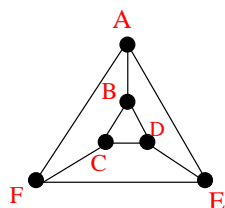
และ

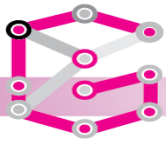


c.



และ





3. เชฟหมึกแดงต้องการเข้าแข่งขันชิงแชมป์ Iron Chef Thailand เขาต้องมอบหมายงานให้กับผู้ช่วยของเขา ซึ่งมีความสามารถเฉพาะทาง 4 คน คือ A , B , C และ D เขามีงาน 4 แบบสำหรับผู้ช่วย 4 คนนี้ คือ งานล้าง หั่น งานผัด งานต้ม และงานตกแต่งจาน โดย A มีความสามารถในงานล้างหั่นและงานตกแต่งจาน B มีความสามารถในงานต้มและงานตกแต่งจาน C มีความสามารถในงานล้างหั่นและงานผัด และ D มีความสามารถในงานผัดและงานต้ม เชฟหมึกแดงจะสามารถมอบงานให้กับผู้ช่วยทุกคนของเขาได้ตรงกับความสามารถของแต่ละคนหรือไม่

### 3.1 สิ่งที่สามารถหาได้จากการหา มื่ออะไรบ้าง

.....เชฟหมึกแดงจะสามารถมอบงานให้กับผู้ช่วยทุกคนของเขาได้ตรงกับความสามารถของแต่ละคนหรือไม่.....

### 3.2 สิ่งที่สามารถหาได้จากการกำหนดมาให้ มื่ออะไรบ้าง

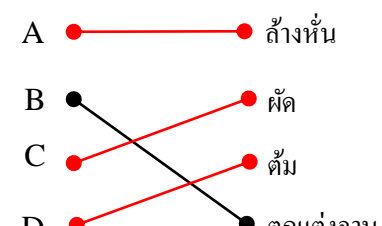
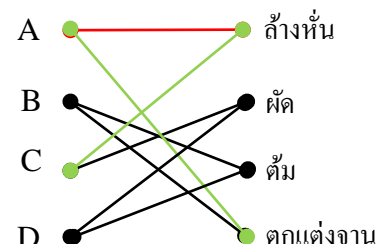
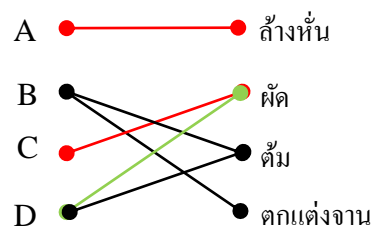
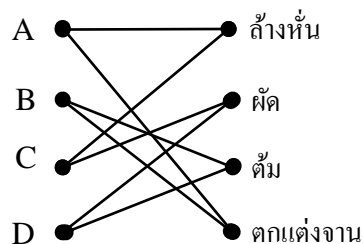
.....เชฟหมึกแดงต้องมอบหมายงานให้กับผู้ช่วย โดย A มีความสามารถในงานล้างหั่นและงานตกแต่งจาน B มีความสามารถในงานต้มและงานตกแต่งจาน C มีความสามารถในงานล้างหั่นและงานผัด และ D มีความสามารถในงานผัดและงานต้ม.....

### 3.3 ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มื่ออะไรบ้าง

.....การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์โดยใช้กราฟ.....

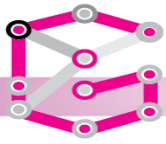
### 3.4 จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด

วิธีทำ ให้จัดยอดแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทนผู้ช่วย 4 คน กลุ่มที่ 2 แทนตำแหน่งงาน 4 ตำแหน่ง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุด แทน ความสัมพันธ์ระหว่างคนกับสามารถในการทำงานของคนคนนั้น ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนตัวอย่างแบบจำลองได้ดังรูป



### 3.5 คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มื่ออะไรบ้าง (ตัวอย่างหนึ่งในคำตอบ)

.....A → งานล้างหั่น , B → งานตกแต่งจาน , C → งานผัด และ D → งานต้ม.....



- 4 สายลับคนหนึ่งเข้าไปสืบข่าวในบ้านของผู้ต้องสงสัยและได้ส่งข่าวมาให้กับตำรวจเพื่อเข้าไปค้นหาหลักฐาน โดยภายในบ้านมีประตูกลที่เมื่อมีคนผ่านแล้วจะปิดลงทันทีและจะออกมาได้เมื่อผ่านประตูครบทุกบาน ซึ่งข่าวที่ได้มาคือ มีประตูระหว่างห้องโถงกับห้องนอน 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องโถงกับห้องทำงาน 2 ประตู

มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องแต่งตัว 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องน้ำ 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องทำงาน 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องทำงานกับห้องน้ำ 1 ประตู

มีประตูระหว่างห้องแต่งตัวกับห้องโถง 1 ประตู

ตำรวจจะทำการกิจนี้สำเร็จได้หรือไม่ ถ้าได้ควรจะมีวิธีการเข้าไปสำรวจแต่ละห้องอย่างไรจึงจะสำเร็จ

#### 4.1 สิ่งที่ยสถามการณัปัญหาต้องการหา มีอะไรบ้าง

.....ตำรวจเข้าไปค้นหาหลักฐานในบ้านของผู้ต้องสงสัยตำรวจจะทำการกิจนี้สำเร็จได้หรือไม่ ถ้าได้ควรจะมีวิธีการเข้าไปสำรวจแต่ละห้องอย่างไรจึงจะสำเร็จ.....

#### 4.2 สิ่งที่ยสถามการณัปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง

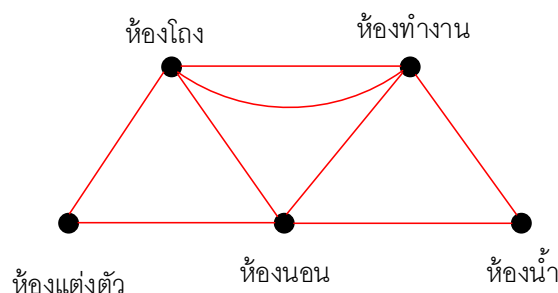
.....ภายในบ้านมีประตูกลที่เมื่อมีคนผ่านแล้วจะปิดลงทันทีและจะออกมาได้เมื่อผ่านประตูครบทุกบาน ซึ่งข่าวที่ได้มาคือ มีประตูระหว่างห้องโถงกับห้องนอน 1 ประตู มีประตูระหว่างห้องโถงกับห้องทำงาน 2 ประตู มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องแต่งตัว 1 ประตู มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องน้ำ 1 ประตู มีประตูระหว่างห้องนอนกับห้องทำงาน 1 ประตู มีประตูระหว่างห้องทำงานกับห้องน้ำ 1 ประตู มีประตูระหว่างห้องแต่งตัวกับห้องโถง 1 ประตู.....

#### 4.3 ความรู้ / แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

.....การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์โดยใช้กราฟ.....

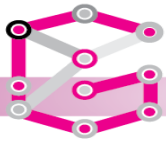
#### 4.4 จงแสดง แนวคิดและวิธีการแก้ปัญหา อย่างละเอียด

วิธีทำ



#### 4.5 คำตอบของสถานการณ์ปัญหานี้ มีอะไรบ้าง

.....ตำรวจสามารถทำการกิจนี้ได้สำเร็จ พบว่าสามารถผ่านทุกประตูได้เพียงครั้งเดียวและ.....สามารถกลับมาที่ห้องเดิมได้.....



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ชุดที่ 1 เรือง กำเนดกราฟและควมรู้เบ้องต้นเก่ยวกับกราฟ

ข้อ	เฉลย
1	ก
2	ง
3	ค
4	ง
5	ค
6	ง
7	ข
8	ค
9	ข
10	ก



## บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์.(2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 4**. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา.(2558). **เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์เสริม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์วชิรรินทร์ พี.พี.
- ชนวัฒน์ (สันติ) สนทราพรพล.(ม.ป.ป.). **แบบฝึกทักษะและวิธีคิดเร็วคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4-6 เล่ม 4**. กรุงเทพฯ : SCIENCE CENTER.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2556). **เอกสารเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สกสศ. ลาตพรวัว \_\_\_\_\_ . (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สกสศ. ลาตพรวัว
- สุชีพ งามเจริญ และ ไอศุริย สดประเสริฐ.(ม.ป.ป.). **คณิตคิดเร็วทีละเรื่อง: ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น**. นนทบุรี : ธรรมบัณฑิต
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2551). **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟ หลักสูตรระยะเวลาเรียนสำหรับนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : ออฟเซ็ท

